Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody réelles presque déployées

Hechmi Ben Messaoud, Guy Rousseau

Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody réelles presque déployées

par

Hechmi Ben Messaoud et Guy Rousseau

Abstract. *The classification of almost split real forms of symmetrizable Kac-Moody Lie algebras is a rather straightforward infinite-dimensional generalization of the classification of real semi-simple Lie algebras in terms of the Tits index [J. of Algebra 171, 43-96 (1995)]. We study here the conjugate classes of their Cartan subalgebras under the adjoint groups or the full automorphism groups. Maximally split Cartan subalgebras of an almost split real Kac-Moody Lie algebra are mutually conjugate and one can generalize the Sugiura classification (given for real semi-simple Lie algebras) by comparing any Cartan subalgebra to a standard maximally split one. As in the classical case, we prove that the number of conjugate classes of Cartan subalgebras is always finite.*

Introduction. Les formes réelles des algèbres de Kac-Moody complexes généralisent les algèbres de Lie semi-simples réelles. Outre leur intérêt mathématique, ces formes ont des applications diverses en Physique Théorique. La non-conjugaison des sous-algèbres de Borel des algèbres de Kac-Moody fait apparaître, dans le cas indécomposable, deux types de formes réelles : les formes presque déployées et les formes presque compactes. Ces formes ont été étudiées séparément et respectivement dans [Ro1], [Ro3] et [B_3R] pour les algèbres de Kac-Moody symétrisables et dans [Ro2] et [BMR1] pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir aussi [Ro5] pour une revue d'ensemble). On s'intéresse ici à l'étude des classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan (en abrégé *SAC*) pour les formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables. Le cas des formes presque compactes (des algèbres affines) fait l'objet d'une étude à part [BMR2].

Au paragraphe 1, nous rappelons les résultats généraux sur les algèbres de Kac-Moody complexes, leurs groupes d'automorphismes et leurs formes réelles. Nous y fixons également les notations utilisées dans la suite. Si $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle presque déployée associée à une semi-involution σ' d'une algèbre de Kac-Moody complexe $\mathfrak{g}$, il existe une semi-involution de Cartan (ou compacte) ω' qui commute à σ' et on a la décomposition de

Classification AMS (2000) :17B67.

Mots clefs: Algèbre de Kac-Moody, sous-algèbre de Cartan, forme réelle presque déployée.

Cartan $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ par rapport à l'involution de Cartan $\sigma = \sigma'\omega'$ (qui est non triviale).

Le groupe commutatif Γ engendré par σ' et ω' agit sur le groupe de Kac-Moody G associé à l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$, sur le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (resp. $Int(\mathfrak{g}) = \tilde{G}$) des automorphismes (resp. des automorphismes intérieurs) de $\mathfrak{g}$ et sur le groupe $G^* = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce de $\mathfrak{g}'$. On considère les groupes $G_{\mathbb{R}} = G^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{G}^{\sigma'}$ et $G^*{}_{\mathbb{R}} = (G^*)^{\sigma'}$ ainsi que $K = G^{\Gamma}$, $\tilde{K} = \tilde{G}^{\Gamma}$ et $K^* = (G^*)^{\Gamma}$ (cf. 1.11). Le couple $(G_{\mathbb{R}}, K)$ est la généralisation la plus naturelle dans ce cadre de la paire symétrique associée à une algèbre de Lie semi-simple réelle; mais les couples $(\tilde{G}_{\mathbb{R}}, \tilde{K})$ et $(G^*{}_{\mathbb{R}}, K^*)$ sont a priori (et a posteriori) aussi intéressants.

Au paragraphe 2, on fixe une forme presque déployée $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ indécomposable, symétrisable et de dimension infinie. Une sous-algèbre de Cartan (en abrégé SAC) $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ correspond à une sous-algèbre de Cartan $\sigma'-$stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$; on montre que cette SAC est conjuguée par $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ à une SAC $\Gamma-$stable. On obtient ainsi (théorème 2.7) une correspondance bijective entre les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, ou $G^*_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$) des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ (c'est à dire des sous-algèbres de Cartan $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$). Malheureusement, les moyens employés ne permettent pas à cette étape d'obtenir le résultat analogue pour $G_{\mathbb{R}}$ et K; cela nous conduit à continuer de travailler avec des sous-algèbres de Cartan quelconques de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Heureusement si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est une SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, il existe une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ' et stabilise $\mathfrak{h}$, de plus ω' est unique modulo un automorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ qui fixe $\mathfrak{h}$ point par point (1.10); la décomposition correspondante $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ avec $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}$ est donc intrinsèque (1.12); on note $\mathfrak{h}^{+}$ et $\mathfrak{h}^{-}$ les sous-espaces complexes engendrés par $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$.

D'après [B$_3$R] on sait que $G_{\mathbb{R}}$ agit transitivement sur les sous-algèbres toriques déployées maximales ($SATDM$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et aussi sur les sous-algèbres de Cartan maximalement déployées ($SACMD$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, qui sont les SAC contenant une $SATDM$ (i.e. telles que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ soit maximale). On montre que le groupe K agit transitivement sur les $SACMD$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (proposition 2.6). Comme dans le cas classique [Su], on va comparer toute SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ à l'une de ces $SACMD$ ${}^{d}\mathfrak{h}$ que l'on fixe (parmi les $SACMD$ $\sigma-$stables).

On montre que, à conjugaison près par $G_{\mathbb{R}}$ (resp. K), on peut supposer que toute SAC (resp. SAC $\sigma-$stable) $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est *standard relativement à* ${}^{d}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ i.e. vérifie $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} \subset {}^{d}\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$, cf. 2.10. De plus la classe de conjugaison sous le groupe $G_{\mathbb{R}}$ (resp. K, $\tilde{K}$ ou K^*) de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est en correspondance bijective avec la classe de conjugaison de $\mathfrak{h}^{-}$ sous le normalisateur de ${}^{d}\mathfrak{h}$ dans $G_{\mathbb{R}}$ (resp. K, $\tilde{K}$ ou K^*) et donc sous l'image $W_{G_{\mathbb{R}}}$ (resp. W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou W_{K^*}) de celui-ci dans le groupe de Weyl W de $(\mathfrak{g}, {}^{d}\mathfrak{h})$ (théorème 2.12). Un sous-espace de ${}^{d}\mathfrak{h}^{-}$ est dit *admissible* s'il peut s'écrire sous la forme $\mathfrak{h}^{-}$ avec une SAC standard $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Le centralisateur dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ d'un sous-espace admissible est une algèbre de Lie réductive réelle (2.8); on peut donc, comme dans le cas classique [Su], caractériser les sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ en termes de systèmes de racines réelles "déployées" fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$ (proposition 2.15). Puis on montre que les orbites de ces systèmes de racines fortement orthogonales (à l'équivalence $\mathcal{R}$ près de 2.15) sont les mêmes sous $W_{G_\mathbb{R}}$ ou W_K (2.20) et sont en nombre fini (2.21). On obtient donc le théorème suivant, qui résume les théorèmes 2.7, 2.17, 2.20 et 2.22:

Théorème *Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ une forme réelle presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ (indécomposable, symétrisable et de dimension infinie). Les trois ensembles suivants sont finis et en correspondance bijective naturelle:*
- les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ ou $G^*_\mathbb{R}$ (resp. $\tilde{G}_\mathbb{R}$ ou $G_\mathbb{R}$) des SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$,
- les classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$ ou K) des SAC σ-stables de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$,
- les classes de conjugaison sous W_{K^*} (resp. $W_{\tilde{K}}$ ou W_K) des systèmes de racines réelles déployées fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$.

Enfin, au paragraphe 3, nous appliquons ces résultats aux 5 formes réelles presque déployées des algèbres affines de type $A_1^{(1)}$ ou $A_2^{(2)}$: il y a 1, 2 ou 3 classes de conjugaison de SAC, selon la forme et le groupe. En particulier la forme réelle déployée de $A_2^{(2)}$ a 3 classes de conjugaison de SAC (que ce soit sous le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ ou sous le groupe $G_\mathbb{R}$), cf. 3.2.1: une classe de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement déployées et deux classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan maximalement compactes ($SACMC$ = SAC avec $\mathfrak{h}^+_\mathbb{R}$ maximale). Ainsi la conjugaison des $SACMC$ dans le cas classique [W; 1.3.3.3] ou dans le cas affine presque compact [BMR1], [BMR2] ne se généralise pas au cas presque déployé.

1. Automorphismes et formes réelles des algèbres de Kac-Moody

1.1. On considère une algèbre de Kac-Moody complexe symétrisable $\mathfrak{g}$ que l'on suppose construite comme dans [K] et avec toutes ses composantes de dimension infinie. Pour les résultats standard suivants, on renvoie à [K] et [PK] ou parfois à [KP$_1$], [KP$_2$], [Ro2], [Ro3] ou [B$_3$R]. Il existe une matrice de Cartan généralisée (encore appelée matrice de Kac-Moody) $A = (a_{i,j})_{i,j\in I}$ telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ soit engendrée par l'*algèbre de Cartan standard* $\mathfrak{h}$ et des éléments e_i, f_i pour $i \in I$. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha\big)$, où Δ désigne le système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. On note $\Pi = \{\alpha_i, i \in I\}$ la base (standard) de Δ. L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est $\Delta^+ = \Delta \cap \big(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{N}\alpha_i\big)$ (resp. $\Delta^- = -\Delta^+$).

Les coracines $\alpha_i^\vee$ dans $\mathfrak{h}$ sont telles que $a_{i,j} = \alpha_j(\alpha_i^\vee)$ pour tout i, j. Le *groupe de Weyl* W de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est engendré par l'ensemble S des réflexions fondamentales r_i définies par $r_i(h) = h - \alpha_i(h)\alpha_i^\vee$ pour $h \in \mathfrak{h}$. Une *racine réelle* est une racine conjuguée par W à une racine dans Π, leur ensemble est noté Δ^{re}. Les éléments de $\Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^{re}$ sont les *racines imaginaires*. Le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h}; \alpha(h) = 0, \forall \alpha \in \Pi\}$, il est contenu dans $\mathfrak{h}' = \underset{i \in I}{\oplus} \mathbb{C}\alpha_i^\vee$ qui est l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$ de $\mathfrak{g}$.

1.2. On définit un groupe G (ne dépendant que de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$) agissant sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Il est engendré par des sous-groupes V_α, pour α racine réelle, chacun isomorphe au groupe additif $\mathfrak{g}_\alpha$ par un isomorphisme exp tel que $\mathrm{Ad} \circ \exp = \exp \circ \mathrm{ad}$. On note V_+ (resp. V_-) le sous-groupe de G engendré par les V_α pour $\alpha \in (\Delta^{re})^+$(resp. $(\Delta^{re})^-$).

Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan standard $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}'$ est l'ensemble des $g \in G$ qui agissent sur $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$) par multiplication par un scalaire $\alpha(g)$ dépendant multiplicativement de α (en particulier H fixe $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$). Ainsi, pour $h \in H$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, on a $h \exp(X) h^{-1} = \exp(\alpha(h)X)$ et donc H normalise V_α, en particulier H normalise V_+ et V_-. On note $B^+ = HV_+$ et $B^- = HV_-$; ce sont les *sous-groupes de Borel standard positif et négatif.*

Soit N le normalisateur de H dans G. Le groupe N/H s'identifie au groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On a les décompositions suivantes du groupe G (cf. [PK] ou [KP1]) :

Décomposition de Bruhat : $G = B^+WB^+ = V_+NV_+$.

Décomposition de Birkhoff : $G = B^-WB^+ = V_-NV_+$.

Dans les deux décompositions, la composante suivant N est unique et tout élément g de G s'écrit de manière unique $g = vnu$, avec $u \in V_+$, $n \in N$ et $v \in V_\pm \cap nV_-n^{-1}$.

1.3. Une *sous-algèbre de Cartan* (SAC en abrégé) de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$−diagonalisable (pour des valeurs propres complexes) maximale. Les SAC de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par G.

Si $\mathfrak{h}$ est une SAC de $\mathfrak{g}$, elle contient le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{g}$ et c'est la seule SAC de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$. De plus la sous-algèbre $\mathfrak{h}'$ (resp. $\mathfrak{h}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}'/\mathfrak{c}$) est une SAC de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) et toute SAC de $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$) est ainsi obtenue. On obtient donc ainsi des bijections entre les ensembles de SAC de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$, cf. [BMR2; 1.15].

Une *sous-algèbre de Borel* (SAB) de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie complètement résoluble maximale de $\mathfrak{g}$. C'est le cas des sous-algèbres $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha\big)$ [ou $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus \big(\bigoplus_{\alpha \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\alpha\big)$] appelées respectivement sous-algèbre de Borel standard positive ou négative. Ces sous-algèbres de Borel $\mathfrak{b}^+$ et $\mathfrak{b}^-$ ne sont pas conjuguées par G; leurs stabilisateurs respectifs dans G sont les sous-groupes de Borel B^+ et B^-. Les sous-algèbres de Borel conjuguées par G à $\mathfrak{b}^+$(resp. $\mathfrak{b}^-$) sont dites *positives* (resp. *négatives*). Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, toute SAB est positive ou négative. On a la même correspondance que pour les sous-algèbres de Cartan entre les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$.

Une *sous-algèbre parabolique positive* (resp. *négative*) est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ contenant une sous-algèbre de Borel positive (resp. négative).

Un automorphisme (linéaire ou semi-linéaire) de $\mathfrak{g}$ agit de manière compatible à Ad sur G et donc transforme deux SAB conjuguées en deux SAB conjuguées; il est dit de *première espèce* (resp. *seconde espèce*) s'il transforme une SAB positive en une SAB positive (resp. négative). Si $\mathfrak{g}$ est indécomposable, tout automorphisme est de première ou de seconde espèce.

1.4. Automorphismes de $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{h}$ la SAC standard de $\mathfrak{g}$. On définit dans [PK] un groupe $\tilde{H}$ qui agit sur G et $\mathfrak{g}$ et qui vérifie $\mathrm{Ad}(\tilde{H}) = \exp \mathrm{ad}(\mathfrak{h})$. L'*involution de Cartan* ω de $\mathfrak{g}$ est définie par $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ et $\omega(h) = -h$ pour $h \in \mathfrak{h}$; elle dépend donc du choix de l'épinglage $(\mathfrak{h}, \Pi, (e_i, f_i)_{i \in I})$ de 1.1. Le *groupe des automorphismes intérieurs* de $\mathfrak{g}$ est l'image $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) := \mathrm{Ad}(\tilde{H} \ltimes G)$ du produit semi-direct de $\tilde{H}$ et G. Son groupe dérivé est le *groupe adjoint* $\mathrm{Ad}(G)$ (noté aussi $\mathrm{Int}'(\mathfrak{g})$ ou $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$) ou groupe des automorphismes intérieurs de l'algèbre dérivée $\mathfrak{g}'$. Ces groupes sont intrinsèquement définis par $\mathfrak{g}$ (cf. [Ro2]).

On considère le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ des permutations ρ de I telles que $a_{\rho i, \rho j} = a_{i,j}$ pour $i, j \in I$. On en déduit une action fidèle de $\mathrm{Aut}(A)$ sur $\mathfrak{g}'$ en posant $\rho(e_i) = e_{\rho i}$ et $\rho(f_i) = f_{\rho i}$; cette action commute à ω, et $\rho(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}'$, où $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}' = \oplus \mathbb{C}\alpha_i^\vee$; plus précisément, $\rho(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\rho i}^\vee$. D'après [PK], le groupe $\mathrm{Aut}(A) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $(\mathrm{Aut}(A) \ltimes \Omega) \ltimes \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, où Ω désigne le groupe commutatif engendré par les involutions de Cartan des composantes de $\mathfrak{g}$, avec $\Omega = \{1, \omega\}$ dans le cas indécomposable) est le groupe $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ des automorphismes de première espèce (resp. le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ de tous les automorphismes) de $\mathfrak{g}'$ (ou $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$). On peut prolonger l'action de $\mathrm{Aut}(A)$ de $\mathfrak{h}'$ à $\mathfrak{h}$, et donc de $\mathfrak{g}'$ à $\mathfrak{g}$, par le choix d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. On peut ainsi considérer $\mathrm{Aut}(A)$ comme un groupe d'automorphismes (dits *de diagramme*) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, commutant à ω et normalisant $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$ et Ω, et considérer $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ comme un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$, mais ces définitions ne sont pas intrinsèques (cf. [Ro2]).

Le sous-groupe $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ des *transvections* de $\mathfrak{g}$ (noté $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ dans [KW; 4.20]) est formé des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui induisent l'identité sur $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ ou $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$); il commute à $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et ω, et est isomorphe au groupe additif des applications $\mathbb{C}-$linéaires de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$ dans $\mathfrak{c}$ (cf. [Ro2]). Le groupe des automorphismes (resp. des automorphismes de première espèce) de $\mathfrak{g}$ est $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}') \ltimes \mathrm{Tr}$ (resp. $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}) = \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}') \ltimes \mathrm{Tr}$).

1.5. Automorphismes semi-linéaires.

On note $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ qui sont soit $\mathbb{C}$-linéaires soit *semi-linéaires* (ou antilinéaires i.e. $\phi(\lambda x) = \bar{\lambda}\phi(x)$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathfrak{g}$). Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est distingué dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ et d'indice 2. On appelle *semi-involution* de $\mathfrak{g}$ un automorphisme semi-linéaire d'ordre 2. Pour toute semi-involution σ', on a la décomposition en produit semi-direct :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'\} \ltimes \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}).$$

Si σ' est une semi-involution de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, au sens où l'application évidente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie complexes; de plus, σ' est la conjugaison de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre semi-involutions et formes réelles. La forme réelle *normale* (ou *déployée*) standard est la sous-algèbre de Lie réelle de $\mathfrak{g}$ engendrée par les $e_i, f_i, \check{\alpha_i}$, et $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$, où $\mathfrak{h}''_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de $\mathfrak{h}''$ sur laquelle $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ prend des valeurs réelles. La semi-involution correspondante σ'_n est la *semi-involution normale.*

1.6. Structure de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$.

La semi-involution normale σ'_n commute à Ω et $\mathrm{Aut}(A)$, elle normalise $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ et $Tr(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ mais ne commute pas avec eux. La décomposition suivante de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$) se déduit donc de celle de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$) :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = (\{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))) \ltimes \left(\mathrm{Ad}(G.\tilde{H}) \ltimes Tr\right).$$

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}') = (\{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))) \ltimes \mathrm{Ad}\left(G.\tilde{H}\right).$$

Les groupes Ω et $\mathrm{Aut}(A)$ commutent dès que $\mathfrak{g}$ est indécomposable.

On note $\mathrm{Int}_{Tr}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ad}(G.\tilde{H}) \ltimes Tr$ le groupe des automorphismes "*presque intérieurs*" et $\mathrm{Ext}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}) = \{1, \sigma'_n\} \times (\Omega \rtimes \mathrm{Aut}(A))$.

La classe de conjugaison d'un élément ϕ de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$ détermine donc un élément ϕ_1 de $\{1, \sigma'_n\}$, un élément Φ de $\mathrm{Aut}(A)$, et une orbite $cl(\phi_2)$ dans Ω. On a $\phi_1 = 1$ (resp. σ'_n) si et seulement si ϕ est linéaire (resp. semi-linéaire). Lorsque $\mathfrak{g}$ est indécomposable, on a $\phi_2 = 1$ (resp. ω) si et seulement si ϕ est de première (resp. seconde) espèce. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est affine et si ϕ est linéaire de première (resp. seconde) espèce, ϕ induit l'identité (resp. moins l'identité) sur $\mathfrak{g}/_{\mathfrak{g}'}$ et le centre $\mathfrak{c}$.

1.7. Forme bilinéaire invariante.

Le choix fait en 1.4 d'un supplémentaire $\mathfrak{h}''$ de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$ permet de définir une forme $(.\,,\,.)$ $\mathbb{C}$-bilinéaire invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ comme dans [K; Chap 2]. Elle est invariante sous l'action de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$.

1.8. Semi-involutions de Cartan.

La *semi-involution de Cartan standard* ω' de $\mathfrak{g}$ est le produit commutatif $\omega' = \omega\sigma'_n = \sigma'_n\omega$. On appelle *semi-involution de Cartan* (SIC) de $\mathfrak{g}$ tout conjugué de ω' par un automorphisme de $\mathfrak{g}$; c'est donc une semi-involution de seconde espèce.

Dans [Ro2], on caractérise comme suit les semi-involutions de Cartan: une semi-involution σ' de $\mathfrak{g}$ est de Cartan si et seulement si il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ stable par σ', et une forme bilinéaire invariante B fixée par σ' (i.e. $B(\sigma' x, \sigma' y) = \bar{B}(x,y)$, $x, y \in \mathfrak{g}$) telles que la forme bilinéaire $B_{\sigma'}$, définie par $B_{\sigma'}(X,Y) = -B(X, \sigma' Y)$, soit hermitienne non dégénérée et définie positive sur la somme $\oplus\mathfrak{g}_\alpha$ des espaces radiciels correspondants (pour ω' la forme B associée est celle choisie en 1.7). L'orthogonal, pour $B_{\sigma'}$, de $\mathfrak{g}'$ est le centre $\mathfrak{c}$ et, si $\mathfrak{g}$ est affine, la forme hermitienne induite sur $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}'/\mathfrak{c}$ est définie positive [K; 11.7].

Ces semi-involutions sont aussi appelées *semi-involutions compactes* et les formes réelles correspondantes sont appelées *formes réelles compactes.* D'après ce que l'on vient de dire, toute algèbre de Kac-Moody symétrisable a une forme compacte unique à conjugaison près.

On sait [Ro2; 4.4] que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ stables par une SIC ω' sont conjuguées par $U = G^{\omega'}$. Ainsi les couples $(\omega', \mathfrak{h})$ formés d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ stable par une SIC ω' sont conjugués.

1.9. Formes réelles presque déployées ou presque compactes.

La forme réelle correspondant à une semi-involution de première espèce ($SI1$) (resp. de seconde espèce ($SI2$)) est dite *presque déployée* (resp. *presque compacte*).

D'après [Ro2; 3.6], toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ est conjuguée par $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ à une semi-involution contenue dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. D'après [KW; 4.39], toute involution de seconde espèce de $\mathfrak{g}$ est conjuguée par Tr à une involution contenue dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$.

Dans la suite de cet article on supposera donc que *toutes les involutions ou semi-involutions qui interviendront seront dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$ *ou* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$. Si l'on ne veut pas faire cette restriction, il faudra rajouter le groupe $\mathrm{Tr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{c})$ dans les théorèmes de conjugaison qui vont suivre.

Proposition 1.10.

1) Toute semi-involution de $\mathfrak{g}$ *stabilise une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}$.

2) Soit σ' *une semi-involution de* $\mathfrak{g}$ *(dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$*). Pour toute sous-algèbre de Cartan* σ'*-stable* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$*, il existe une* SIC θ' *(dans* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$*) stabilisant* $\mathfrak{h}$ *et commutant à* σ'*. De plus* θ' *est unique à conjugaison près par un élément de* $\tilde{H}^{\sigma'}$*, c'est à dire par un automorphisme intérieur de* $\mathfrak{g}$ *qui fixe* $\mathfrak{h}$ *(point par point) et commute à* σ'*.*

3) Deux SIC *qui commutent et stabilisent une même sous-algèbre de Cartan sont égales.*

Démonstration.

C'est une conséquence directe des résultats 3.11, 3.12, 4.5 et 4.6 b de [Ro2]; on peut voir aussi [KP2].

□

1.11. Définitions.

1) Une semi-involution de Cartan ω' de $\mathfrak{g}$ est dite *adaptée* à σ' si elle commute à σ'. On considère une *SIC* ω' adaptée à σ' et on note $\sigma = \sigma'\omega' = \omega'\sigma'$ et $\Gamma = \langle \sigma', \omega' \rangle = \{1, \sigma', \omega', \sigma\}$.

2) La forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}^{\sigma'}$ admet une *décomposition de Cartan* (associée à σ ou ω'):

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

où $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{\sigma}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p} \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g}^{-\sigma}$.

Plus généralement les notations $\mathfrak{e}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{e}$ pour des sous-espaces de $\mathfrak{g}$ signifient que $\mathfrak{e}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{e}^{\sigma'}$ et $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

On note $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\omega'} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ la forme compacte associée à ω'.

3) On associe à ces sous-algèbres plusieurs sous-groupes des groupes de 1.2 et 1.4 :

$$G_{\mathbb{R}} = G^{\sigma'}; \quad U = G^{\omega'}; \quad K = G^{\Gamma} = U \cap G_{\mathbb{R}} = U^{\sigma} = G_{\mathbb{R}}^{\sigma}.$$

$$\tilde{G} := \mathrm{Int}(\mathfrak{g}); \quad \tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{G}^{\sigma'}; \quad \tilde{K} = \tilde{G}^{\Gamma}$$

$$G^* := \mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}'); \quad G^*_{\mathbb{R}} = (G^*)^{\sigma'}; \quad K^* = (G^*)^{\Gamma}.$$

On a:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ad}(K) & \subset & \tilde{K} & \subset & K^* \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\mathrm{Ad}(G_{\mathbb{R}}) & \subset & \tilde{G}_{\mathbb{R}} & \subset & G^*_{\mathbb{R}} \\
\cap & & \cap & & \cap \\
\mathrm{Ad}(G) & \subset & \tilde{G} & \subset & G^*.
\end{array}$$

1.12. Sous-algèbres de Cartan.

1) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan σ'-stable de $\mathfrak{g}$, on dit que la sous-algèbre $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}^{\sigma'}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une *sous-algèbre de Cartan* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Avec les notations de 1.11, on considère maintenant une sous-algèbre de Cartan σ-stable $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire une sous-algèbre de Cartan Γ-stable $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}$. On a la décomposition $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$, où $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\sigma}$ (resp. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-\sigma}$) est la *partie compacte ou torique* (resp.*déployée ou vectorielle*) de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. On note $\mathfrak{h}^{+} = \mathfrak{h}^{\sigma}$ et $\mathfrak{h}^{-} = \mathfrak{h}^{-\sigma}$.

2) Considérons le système de racines $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ de $\mathfrak{g}$ par rapport à $\mathfrak{h}$, il est stable par Γ. Pour $\alpha \in \Delta$, $-\alpha = \omega'(\alpha) = \mathrm{conj} \circ \alpha \circ \omega'$, où conj est la conjugaison complexe, ainsi α prend des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+} \oplus i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$; c'est-à-dire que α est réelle sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ et imaginaire pure sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$; ceci justifie les termes "compacte" et "déployée" ci-dessus. En particulier $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est une *sous-algèbre torique déployée* ($SATD$) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ est commutative et l'action adjointe de $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est diagonalisable. Le centre $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une $SATD$.

Les *racines déployées* (on dit "réelles" dans le cas classique) de Δ sont celles de $\Delta_d = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}) = 0\} = \{\alpha \in \Delta;\ \sigma'(\alpha) = \alpha = -\sigma(\alpha)\}$, elles prennent des valeurs réelles sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Les *racines unitaires* (on dit "imaginaires" dans le cas classique) de Δ sont celles de $\Delta_u = \{\alpha \in \Delta;\ \alpha(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}) = 0\} = \{\alpha \in \Delta;\ \sigma(\alpha) = \alpha = -\sigma'(\alpha)\}$, elles prennent des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Ces racines nous intéressent peu ici.

Les *racines complexes* sont celles de $\Delta_{\mathbb{C}} = \Delta \setminus (\Delta_d \cup \Delta_u)$.

Si α est une racine déployée, $\mathfrak{g}_\alpha$ est stable par σ' et $(\mathfrak{g}_\alpha)^{\sigma'}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}_\alpha$. On note Δ_{dr} l'ensemble des racines déployées de Δ^{re}, i.e. $\Delta_{dr} = \Delta_d^{re}$.

3) La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est dite *maximalement déployée* ($SACMD$) si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-} + \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ est une *sous-algèbre torique déployée maximale* ($SATDM$), c'est-à-dire $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{-}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une SAC maximalement déployée pour σ'.

La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est dite *maximalement compacte* ($SACMC$) ou *fondamentale* (cf. [W; page 99]) si $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire si $\mathfrak{h}^{+}$ est une sous-algèbre $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable maximale de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$; on dit aussi alors que $\mathfrak{h}$ est une SAC maximalement compacte pour σ'.

4) Remarque: Si $\mathfrak{h}$ est une SAC $\sigma'-$stable de $\mathfrak{g}$, il existe une SIC ω' de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ' et stabilise $\mathfrak{h}$; de plus ω' est unique modulo le groupe $\tilde{H}^{\sigma'}$ qui fixe point par point $\mathfrak{h}$ (cf. 1.10). Toutes les définitions précédentes sont donc possibles sans présupposer l'existence de la semi-involution ω' et indépendamment du choix de celle-ci.

5) Si $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ contenant une SAC de $\mathfrak{g}$, alors l'algèbre dérivée $\mathfrak{r}'$ est semi-simple; c'est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}'$ au sens de [KW; 2.11] et on lui associe un sous-groupe algébrique connexe R de G qui conjugue les SAC de $\mathfrak{r}$. En particulier, si $\mathfrak{r}$ est Γ-stable, le sous-groupe $R^\Gamma = R \cap K$ est transitif sur les $SACMC$ (resp. $SACMD$) Γ-stables de $\mathfrak{r}$.

6) Puisque Γ est supposé dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$, la décomposition de 1.4 donne $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'} \ltimes \mathrm{Tr}^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\Gamma = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^\Gamma \ltimes \mathrm{Tr}^\Gamma$. D'autre part Tr stabilise toutes les SAC de $\mathfrak{g}$. Ainsi les classes de conjugaison de SAC sont les mêmes sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^\Gamma$ et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^\Gamma$.

1.13. Groupes de Cartan.

1) Le groupe H associé à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est le tore algébrique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{C}^*) = Q\check{} \otimes \mathbb{C}^*$ où P est le *réseau des poids* dual sur $\mathbb{Z}$ de $Q\check{} = \underset{i \in I}{\oplus} \mathbb{Z}\alpha_i\check{}$ [KW; page 133]. Si on identifie le groupe $\tilde{H}$ de 1.4 à son image $\mathrm{Ad}(\tilde{H})$, on a $\mathrm{Ad}(H) \subset \tilde{H} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{C}^*) = P\check{} \otimes \mathbb{C}^*$, où $Q = \underset{i \in I}{\oplus} \mathbb{Z}\alpha_i$ est le *réseau des racines* [KW; page 137] et $P\check{}$ son dual. Il y a un homomorphisme naturel de Q dans P, on note Q' son image et P' le dual de celle-ci (contenu sans cotorsion dans $P\check{}$). Ainsi $\mathrm{Ad}(H) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q', \mathbb{C}^*) = P' \otimes \mathbb{C}^*$. Le centre $Z(G)$ de G est $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P/Q', \mathbb{C}^*) = (\mathfrak{c} \cap Q\check{}) \otimes \mathbb{C}^* \subset H$, cf. [PK]. Si $\mathfrak{g}$ est affine, $Q' = Q/\mathbb{Z}\delta$, où δ est la plus petite racine imaginaire positive.
2) Si Y est un supplémentaire de P' dans $P\check{}$, on a $\tilde{H} = (Y \otimes \mathbb{C}^*) \times \mathrm{Ad}(H)$ donc $\tilde{G} = \mathrm{Ad}(\tilde{H} \ltimes G) = (Y \otimes \mathbb{C}^*) \ltimes G/Z(G)$. Toute SIC ω' stabilisant $\mathfrak{h}$ stabilise cette décomposition puisqu'elle induit moins l'identité sur P, Q et Q'. Le tore algébrique H correspondant à $\mathfrak{h}$ est stable par ω' et si on pose $H_t = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, S^1) = H^{\omega'}$ et $H_v = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}_+^*)$, on a $H = H_t \times H_v$; on dit que H_t (resp. H_v) est la partie *torique* ou *compacte* (resp. *vectorielle* ou *déployée*) de H.
Notons ici, avec les notations de 1.2, la *décomposition d'Iwasawa* du groupe de Kac-Moody G (cf. [PK] ou [KP_1]) :

$$G = G^{\omega'} H_v V_\pm = U H_v V_\pm \quad \text{(unique)}.$$

3) Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan Γ-stable de $\mathfrak{g}$ (cf. 1.12.1) le groupe $H_{\mathbb{R}} = H^{\sigma'}$ se décompose : $H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}^+ \times H_{\mathbb{R}}^-$, avec une partie torique ou compacte $H_{\mathbb{R}}^+ = H_{\mathbb{R}} \cap H_t$ et une partie vectorielle ou déployée $H_{\mathbb{R}}^- = H_{\mathbb{R}} \cap H_v$ associées respectivement à $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^-$. De même on a, avec des notations évidentes, $\tilde{H}_{\mathbb{R}} = \tilde{H}^{\sigma'} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}^+ \times \tilde{H}_{\mathbb{R}}^-$.

2. Formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody symétrisables.

Dans ce paragraphe, on suppose $\mathfrak{g}$ indécomposable et symétrisable et on fixe une forme réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ presque déployée c'est-à-dire une semi-involution σ' de première espèce . Pour les principaux résultats sur ces formes, on renvoie à [Ro3], [Ro4] et [$\mathrm{B_3R}$; §2 et §4].

2.1. a) Si $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est une $SATDM$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, il existe une SAC $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$. Le centralisateur $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre réductive σ'-stable contenant $\mathfrak{h}$. Pour un bon choix du système de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, l'espace $\mathfrak{p}^\epsilon = \mathfrak{z} + \mathfrak{b}^\epsilon$ est une sous-algèbre parabolique σ'-stable minimale.

b) Une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est contenue dans une sous-algèbre parabolique σ'-stable minimale si et seulement si elle contient une $SATDM$ $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ [$\mathrm{B_3R}$; remarque 2.2], c'est-à-dire si et seulement si c'est une $SACMD$. Et alors la $SATDM$ $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est unique: $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$.

c) Le groupe $G_{\mathbb{R}}$ est transitif sur les couples $(\mathfrak{h}, \mathfrak{p}^\epsilon)$ formés d'une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ contenue dans une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}^\epsilon$ σ'-stable minimale et de même signe ϵ, [$\mathrm{B_3R}$; 4.2.2] et donc sur les triplets $(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}, \mathfrak{p}^\epsilon)$ comme en a), ou sur les $SACMD$, cf. b).

Théorème 2.2. [B_3R; 4.4]. *On considère :*
(1) Les semi-involutions de première espèce σ' de $\mathfrak{g}$
(2) Les involutions de seconde espèce θ de $\mathfrak{g}$
(3) La relation $\sigma' \sim \theta$ si et seulement si
(a) $\omega' = \sigma'\theta = \theta\sigma'$ est une SIC,
(b) σ' et θ stabilisent une même SAC $\mathfrak{h}$,
(c) $\mathfrak{h}$ est contenue dans une sous-algèbre parabolique positive σ'-stable minimale.
Alors cette relation induit une bijection entre les classes de conjugaison sous $\tilde{G} = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ (resp. $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$) des semi-involutions de première espèce et celles des involutions de seconde espèce.

Proposition 2.3. *Il existe une SIC ω' de $\mathfrak{g}$ qui est adaptée à σ'. De plus ω' est unique à conjugaison près par un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}'$ commutant à σ' (i.e. par un $\phi \in \tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{G}^{\sigma'}$). Pour toute SIC ω' adaptée à σ', on a $\sigma' \sim \sigma'\omega'$ au sens de 2.2 .*
N.B. : On a alors un groupe commutatif $\Gamma = \{1, \omega', \sigma', \sigma = \sigma'\omega'\}$ et on dit que σ est l'*involution de Cartan* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, c'est une involution de seconde espèce. Dans la suite on fixe ainsi ω' et Γ.

Démonstration.

Soit $\mathfrak{h}$ une SAC $\sigma'-$stable contenue dans une sous-algèbre parabolique positive $\mathfrak{p}$ $\sigma'-$stable minimale, cf. 2.1. Soit ω' une SIC qui stabilise $\mathfrak{h}$ et commute à σ', cf 1.10. Il suffit de montrer que toute SIC θ' adaptée à σ' est conjuguée à ω' par $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$. La sous-algèbre $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \theta'(\mathfrak{p})$ est de dimension finie et stable par σ' et θ'. D'après [BM; 7.6], l'automorphisme involutif $\theta := \sigma'\theta' = \theta'\sigma'$ stabilise une SAC $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{q}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{q}^{\sigma'}$ (qui est aussi une SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$). D'après 2.1.c, on peut supposer $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ en conjuguant par $N_{G_{\mathbb{R}}}(\mathfrak{p})$. Ainsi, les deux SIC θ' et ω' sont adaptées à σ' et stabilisent la même SAC $\mathfrak{h}$, elles sont donc conjuguées par un automorphisme intérieur commutant à σ' et fixant $\mathfrak{h}$ (cf. 1.10); d'où le résultat.

□

Corollaire 2.4. *Si $\mathfrak{h}$ est une SAC σ'-stable de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est une SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$) il existe $\phi \in \tilde{G}_{\mathbb{R}}$ tel que $\phi(\mathfrak{h})$ soit stable par Γ.*

Démonstration.

C'est une conséquence de 1.10 et 2.3.

□

Proposition 2.5. *Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ deux SAC Γ-stables de $\mathfrak{g}$; alors $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_1$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) si et seulement si elles le sont par K^* (resp. $\tilde{K}$).*

Démonstration.

Les conditions suffisantes étant claires, on montre les conditions nécessaires. Soit $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$ tel que $u(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}$, d'après 1.12.6 on peut supposer u dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$

(resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$); on pose $\omega'_1 = u\omega' u^{-1}$. Alors ω' et ω'_1 sont deux SIC qui stabilisent $\mathfrak{h}$ et commutent à σ'. D'après 1.10, il existe $h \in \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ tel que $\omega' = h\omega'_1 h^{-1} = (hu)\omega'(hu)^{-1}$. Ainsi, l'automorphisme hu est dans le même groupe que u, il commute à ω' et envoie $\mathfrak{h}_1$ sur $\mathfrak{h}$. Si $u \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, alors $hu \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\Gamma}$ et, quitte à multiplier hu par σ, on peut supposer $hu \in K^*$.

□

Proposition 2.6. *Le groupe $K = U^\sigma = G^\Gamma$ est transitif sur les $SACMD$ Γ-stables de $\mathfrak{g}$. En particulier, les $SATDM$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées par K.*

Démonstration.

Si $\mathfrak{h}$ est une $SACMD$ $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique positive $\sigma'-$stable minimale contenant $\mathfrak{h}$, alors pour toute sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ contenue dans $\mathfrak{p}$ et contenant $\mathfrak{h}$, la paire $(\mathfrak{h}, \mathfrak{b})$ est $\sigma-$déployée au sens de [KW, 5.15]. Le groupe G^σ est transitif sur les paires $\sigma-$déployées [KW, 5.32]; il en résulte que deux $SACMD$ $\Gamma-$stables sont conjuguées par G^σ. Soit $g \in G^\sigma$ tel que $\mathfrak{h}$ et $g(\mathfrak{h})$ soient deux $SACMD$ $\Gamma-$stables; on écrit $g = uhv$ selon la décomposition d'Iwasawa du groupe G (cf. 1.13.2). Le fait que $\mathfrak{h}$ et $g(\mathfrak{h})$ soient stables par ω' entraine $n := g^{-1}\omega'(g) \in N$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G. Par ailleurs, on a $n = g^{-1}\omega'(g) = v^{-1}h^{-2}\omega'(v)$ et d'après l'unicité de n dans la décomposition de Birkhoff du groupe G (cf. 1.2) on a $n = h^{-2}$, $v = 1$ et donc $g = uh = \sigma(u)\sigma(h) = \sigma(g)$. Comme σ stabilise $U = G^{\omega'}$ et $H_v = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}^*_+)$, on a d'après l'unicité de la décomposition d'Iwasawa $u = \sigma(u) \in K$ et $g(\mathfrak{h}) = u(\mathfrak{h})$.
Toute $SATDM$ $\sigma-$stable $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est contenue dans une $SACMD$ $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ (unique à conjugaison près par $Z_K(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$). D'après ce que l'on vient de voir, en conjuguant par K, on peut supposer que deux $SATDM$ $\sigma-$stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont contenues dans une même $SACMD$ $\sigma-$stable et donc sont égales, cf. 2.1; d'où le cas particulier.

□

Théorème 2.7. *Les classes de conjugaison sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_{\mathbb{R}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$) des sous-algèbres de Cartan σ'-stables de $\mathfrak{g}$ correspondent bijectivement aux classes de conjugaison sous K^* (resp. $\tilde{K}$) des sous-algèbres de Cartan Γ-stables de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.4 et 2.5.

□

Remarque. On verra plus loin (cf. 2.10 et 2.20) qu'on peut remplacer $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{K}$ par $G_{\mathbb{R}}$ et K dans 2.4, 2.5 et 2.7.

Lemme 2.8. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC $\sigma'-$stable de $\mathfrak{g}$; alors le centralisateur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^-)$ de $\mathfrak{h}^-$ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration.

D'après 1.12.4 on peut supposer $\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable. Soient Π une base de racines de $\Delta =$

$\Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ et $\alpha \in \Delta^+$; alors $\langle \alpha, \mathfrak{h}^- \rangle = 0$ si et seulement si $\sigma(\alpha) = \alpha$, en particulier $\alpha \in \Delta^+ \cap \sigma(\Delta^+)$. Mais σ est de seconde espèce, donc $\Delta^+ \cap \sigma(\Delta^+)$ est fini. Ainsi $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} \oplus \left(\underset{\sigma\alpha=\alpha}{\oplus} \mathfrak{g}_\alpha \right)$ est de dimension finie.

□

Proposition 2.9. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC σ'-stable de $\mathfrak{g}$.*
i) On suppose qu'il existe une SAC ${}^1\mathfrak{h}$ σ'-stable de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h}^- \subset {}^1\mathfrak{h}^-$ (cf. 1.12.4); alors il existe $g \in Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ tel que ${}^1\mathfrak{h}^+ \subset g\mathfrak{h}^+$. En particulier, si $\mathfrak{h}^- = {}^1\mathfrak{h}^-$, on a ${}^1\mathfrak{h}^+ = g\mathfrak{h}^+$.

Si ${}^1\mathfrak{h}$ est Γ-stable, on peut supposer de plus $g\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable.

Si $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ sont Γ-stables, on peut supposer de plus $g \in K$ (donc $g\mathfrak{h}$ $\Gamma-$stable).
ii) Il existe une SAC ${}^d\mathfrak{h}$ σ'-stable (resp. Γ-stable si $\mathfrak{h}$ est Γ-stable) et maximalement déployée pour σ' telle que $\mathfrak{h}^- \subset {}^d\mathfrak{h}^-$; de plus ${}^d\mathfrak{h}$ est unique à conjugaison près par $Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ (resp. $Z_K(\mathfrak{h}^-)$).

Démonstration.

i) Le centralisateur $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}^-)$ de $\mathfrak{h}^-$ dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre réductive, cf. 2.8. Le centre $\mathfrak{z}_0$ de $\mathfrak{z}$ est σ'-stable et contenu dans $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{z}$ est commutative, alors $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} = {}^1\mathfrak{h}$ et donc $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ est déployée ou quasi-déployée; sinon, l'algèbre dérivée $\mathfrak{z}'$ de $\mathfrak{z}$ est semi-simple et stable par σ'. Soit Z' le sous-groupe algébrique connexe de G associé à $\mathfrak{z}'$ (cf. 1.12.5). La forme réelle $\mathfrak{z}'_\mathbb{R} := (\mathfrak{z}')^{\sigma'}$ est intérieure car $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ en est une SAC compacte (pour toute SIC θ' de $\mathfrak{g}$ adaptée à σ' et stabilisant $\mathfrak{h}$). En conjuguant par un élément g de $(Z')^{\sigma'} \subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$, on peut supposer ${}^1\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R} \subset g\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ (cf. 1.12.5). Comme $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ contiennent toutes les deux le centre de $\mathfrak{z}$, on a ${}^1\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \subset g\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ et donc ${}^1\mathfrak{h}^+ \subset g\mathfrak{h}^+$.

Si $\mathfrak{h}$ et ${}^1\mathfrak{h}$ sont Γ-stables, ${}^1\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+ \cap \mathfrak{z}'_\mathbb{R}$ est $\mathbb{C}-$diagonalisable dans $\mathfrak{k}$, on peut donc supposer $g \in K$.

Si ${}^1\mathfrak{h}$ est Γ-stable, alors ω' vaut moins l'identité sur ${}^1\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$, donc stabilise $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^-$, $\mathfrak{h}^-$, $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}$'. En conjuguant par $(Z')^{\sigma'} \subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$, on peut supposer $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ (et donc $\mathfrak{h}$) $\Gamma-$stable et on conclut avec l'alinéa précédent.

ii) Soit ${}^d\mathfrak{h}$ une SAC de $\mathfrak{z}$ qui est σ'-stable (resp. Γ-stable si $\mathfrak{h}$ est Γ-stable) et maximalement déployée pour σ', alors ${}^d\mathfrak{h}$ est également une SAC de $\mathfrak{g}$ (qui est σ'-stable (resp. Γ-stable) et maximalement déployée pour σ') qui contient $\mathfrak{h}^-$. Deux choix possibles de ${}^d\mathfrak{h}$ sont contenus dans $\mathfrak{z}$ et sont donc conjugués par $(Z')^{\sigma'} \subset Z_{G_\mathbb{R}}(\mathfrak{h}^-)$ (resp. $(Z')^\Gamma \subset Z_K(\mathfrak{h}^-)$).

□

2.10. Définitions. Dans la suite, en plus de la SIC ω', on se fixe une $SACMD$ ${}^d\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est Γ-stable; il n'y a qu'un seul choix modulo K, d'après 2.6. On note $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$.

Une SAC σ'-stable $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^- \subset {}^d\mathfrak{h}^-$ est dite *standard*. Elle est dite *spéciale* si de plus elle est $\Gamma-$stable et vérifie ${}^d\mathfrak{h}^+ \subset \mathfrak{h}^+$.
D'après la proposition 2.9 et 2.1c (resp. et 2.6), toute SAC σ'-stable (resp. Γ-stable) est

conjuguée par $G_{\mathbb{R}}$ (resp. K) à une SAC spéciale (donc standard et $\Gamma-$stable). On obtient ainsi un résultat plus précis que celui du corollaire 2.4.

Un sous-espace $\mathfrak{a}^-$ de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est dit *admissible* s'il existe une SAC standard $\mathfrak{h}$ telle que $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{a}^-$. D'après 2.9.i, tout sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est la partie déployée d'une SAC spéciale.

Pour $X = K$, $\tilde{K}$, K^* ou $G_{\mathbb{R}}$, on note $N_X = N_X({}^d\mathfrak{h})$ le normalisateur de ${}^d\mathfrak{h}$ dans X et W_X son quotient par le centralisateur de ${}^d\mathfrak{h}$ dans X.

Lemme 2.11. *Soient $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*) et ${}^1\mathfrak{h}$, ${}^2\mathfrak{h}$ deux SAC standard (resp. et $\Gamma-$stables). Alors ${}^1\mathfrak{h}$ et ${}^2\mathfrak{h}$ sont conjuguées par X si et seulement si ${}^1\mathfrak{h}^-$ et ${}^2\mathfrak{h}^-$ sont conjuguées par W_X.*

Démonstration.

Soit $g \in X$ tel que ${}^2\mathfrak{h} = g.{}^1\mathfrak{h}$, donc ${}^2\mathfrak{h}^- = g.{}^1\mathfrak{h}^-$. Alors ${}^d\mathfrak{h}$ et $g.{}^d\mathfrak{h}$ sont deux $SACMD$ σ'-stables (resp. Γ-stables) de $\mathfrak{g}$ contenant ${}^2\mathfrak{h}^-$. D'après 2.9.ii, il existe $g' \in G_{\mathbb{R}}$ (resp. $g' \in K$), g' fixant ${}^2\mathfrak{h}^-$, tel que $g'(g.{}^d\mathfrak{h}) = {}^d\mathfrak{h}$. Ainsi $g'g \in N_X$ et ${}^2\mathfrak{h}^- = g'g.{}^1\mathfrak{h}^-$.

Pour la réciproque, on peut supposer, quitte à conjuguer, que ${}^2\mathfrak{h}^- = {}^1\mathfrak{h}^-$. D'après 2.9.i, il existe $g \in G_{\mathbb{R}}$ (resp. $g \in K$), g fixant ${}^1\mathfrak{h}^-$, tel que $g.{}^1\mathfrak{h} = {}^2\mathfrak{h}$; d'où le résultat.

□

Théorème 2.12. *Soit $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*). Les classes de conjugaison des SAC $\sigma'-$stables (resp. $\Gamma-$stables) de $\mathfrak{g}$ sous X correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ sous W_X.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.10 et 2.11.

□

Lemme 2.13. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC spéciale différente de ${}^d\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{r} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$ et $\mathfrak{r}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{r}$. Alors $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre réductive Γ-stable de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$ en est le centre. De plus, la forme réelle $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} := (\mathfrak{r}')^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée intérieure (i.e. $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ a même rang que sa sous-algèbre compacte maximale $(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$) .*

Démonstration.

Il est clair que $\mathfrak{r}$ est réductive (cf. 2.8) et que le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{r}$ contient $\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$; mais $\mathfrak{h}$ et ${}^d\mathfrak{h}$ sont deux SAC Γ-stables de $\mathfrak{r}$, donc $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h} \cap {}^d\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+$ et on a égalité.
Comme $\mathfrak{h} \neq {}^d\mathfrak{h}$, on a $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$; de plus ${}^d\mathfrak{h} =^d \mathfrak{h}^- + \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c} \cap^d \mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}^-$, donc $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est une algèbre de Lie semi-simple déployée de rang $\dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-)$. Il est clair que $(\mathfrak{r}')^{\Gamma}$ est de rang au moins $\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^+) - \dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^+)$ qui est égal à $\dim_{\mathbb{C}}({}^d\mathfrak{h}^-) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^-)$; il y a donc égalité et $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est intérieure.

□

Lemme 2.14. *Soit $\mathfrak{h}$ une SAC spéciale telle que $\mathfrak{h} \neq {}^d\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{r} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$ et soit s le rang commun de l'algèbre dérivée $\mathfrak{r}'$ et de $(\mathfrak{r}')^\sigma$, cf. 2.13. Alors il existe dans $\Delta({}^d\mathfrak{h}, \mathfrak{r}')$ $(\subset \Delta^{re}({}^d\mathfrak{h}, \mathfrak{g}))$ un système ϕ de racines déployées fortement orthogonales de rang s tel que*

$$\mathfrak{h}^- = \left(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\right)^\perp \cap {}^d\mathfrak{h}^- = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \operatorname{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-$$

où $\left(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\right)^\perp$ désigne l'orthogonal, dans ${}^d\mathfrak{h}$, de $\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}$ par rapport à la forme bilinéaire invariante de 1.7. En particulier $(\mathfrak{h}^-)^\perp \cap {}^d\mathfrak{h}^-$ est un sous-espace de racines de ${}^d\mathfrak{h}^-$ au sens de [Su; Def. 7 p. 390].

N.B. Deux racines α et β sont *fortement orthogonales* si ni $\alpha + \beta$ ni $\alpha - \beta$ ne sont des racines.

Démonstration.

D'après 2.13, l'algèbre de Lie semi-simple réelle déployée $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$ est intérieure. Pour toute *SAC* $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{r}'$, il existe, d'après [Su; Prop. 11 p. 393], un système de racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{t}, \mathfrak{r}')$ de rang s. La sous-algèbre $\mathfrak{a} = {}^d\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r}'$ est une *SACMD* Γ-stable de $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}^-_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{r}'_{\mathbb{R}}$. En particulier $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{r}')$ est formé de racines réelles déployées de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, {}^d\mathfrak{h})$. Soit ϕ un système de racines fortement orthogonales de $\Delta(\mathfrak{a}, \mathfrak{r}')$ de rang s. Ainsi, on a $\mathfrak{a} = \underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}$ et le centre $\mathfrak{c}$ de $\mathfrak{r}$ est $\mathfrak{c} = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \operatorname{Ker}(\alpha)$ qui est aussi, d'après 2.13, $(\mathfrak{h}^- \oplus {}^d\mathfrak{h}^+)$; d'où $\mathfrak{h}^{-\sigma} = \mathfrak{h}^- = \cap_{\alpha\in\phi} \operatorname{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-$. □

Proposition 2.15. *Soit $\mathfrak{a}^-$ un sous-espace de ${}^d\mathfrak{h}^-$. Alors $\mathfrak{a}^-$ est admissible si et seulement si il existe dans Δ_{dr} un système ϕ de racines (réelles déployées) fortement orthogonales tel que*

$$\mathfrak{a}^- = \left(\underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}\check{\alpha}\right)^\perp \cap {}^d\mathfrak{h}^- = \underset{\alpha\in\phi}{\cap} \operatorname{Ker}(\alpha) \cap {}^d\mathfrak{h}^-.$$

N.B. *Si ϕ est un système de racines réelles fortement orthogonales, alors $\mathfrak{t} := \underset{\alpha\in\phi}{\oplus} \mathbb{C}(e_\alpha + \omega(e_\alpha))$ est une sous-algèbre torique de $\mathfrak{g}'$ qui ne rencontre pas $\mathfrak{c}$. En particulier $|\phi| \leq$* $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}'/\mathfrak{c})$.

Démonstration.

La condition est nécessaire : tout sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ est la partie déployée d'une *SAC* spéciale (cf. 2.10) puis on se ramène à 2.14.

Montrons que la condition est suffisante. Pour $\alpha \in \phi$, soit $x_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R},\alpha} \backslash \{0\} := (\mathfrak{g}_\alpha)^{\sigma'} \backslash \{0\}$ (cf. 1.12.2) et soit $t_\alpha = x_\alpha + \sigma(x_\alpha)$. Alors $t_\alpha \in \mathfrak{k}$ est $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures et ${}^d\mathfrak{h}^+ \subset \operatorname{Ker}(\alpha)$. Ainsi $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^- \oplus [{}^d\mathfrak{h}^+ \oplus (\oplus_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}t_\alpha)]$ est une sous-algèbre commutative $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-diagonalisable et Γ-stable de $\mathfrak{g}$ de même dimension que ${}^d\mathfrak{h}$; c'est donc une SAC Γ-stable de $\mathfrak{g}$ et on a $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{a}^- \subset {}^d\mathfrak{h}^-$. Donc $\mathfrak{h}$ est standard et $\mathfrak{a}^-$ est admissible.

□

Remarque. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur l'ensemble des systèmes de racines réelles déployées de Δ_{dr}, définie par :

$$\phi\mathcal{R}\psi \text{ si et seulement si } \bigoplus_{\alpha\in\phi} \mathbb{C}\alpha = \bigoplus_{\beta\in\psi} \mathbb{C}\beta.$$

D'après 2.15, deux systèmes de racines fortement orthogonales ϕ et ψ de Δ_d correspondent au même sous-espace admissible de ${}^d\mathfrak{h}^-$ si et seulement si ils sont $\mathcal{R}$-équivalents; d'où le résultat suivant :

Proposition 2.16. *Soit $X = K$, $\tilde{K}$, K^* ou $G_{\mathbb{R}}$. Les classes de conjugaison des sous-espaces admissibles de ${}^d\mathfrak{h}^-$ sous W_X correspondent bijectivement à celles des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$.*
N.B : La classe de ${}^d\mathfrak{h}^-$ correspond au système vide de Δ_{dr}.

Théorème 2.17. *Soit $X = G_{\mathbb{R}}$ (resp. $X = K$, $\tilde{K}$ ou K^*). Les classes de conjugaison des SAC $\sigma'-$stables (resp. $\Gamma-$stables) de $\mathfrak{g}$ sous X correspondent bijectivement aux classes de conjugaison des systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$ sous W_X.*

Démonstration.

Cela résulte de 2.12 et 2.16.

□

Proposition 2.18. *Les groupes W_K , $W_{\tilde{K}}$ et $W_{G_{\mathbb{R}}}$ induisent sur la $SATDM$ $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = ({}^d\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$ le groupe de Weyl relatif W'. Le groupe W_{K^*}, induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ une extension de W' par certains automorphismes du diagramme de Dynkin relatif.*

Démonstration.

D'après 2.1c et [Ro4; 3.11] le groupe induit par $W_{G_{\mathbb{R}}}$ est égal à W' et est engendré par les réflexions par rapport aux racines relatives réelles. De plus le groupe $\tilde{G}$ (resp. G^*) agit sur l'ensemble des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ en conservant (resp. permutant) les types. Si l'on admet provisoirement que W_K induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ le groupe W', le raisonnement de la démonstration de [Ro4; 3.11] montre donc que $W_{\tilde{K}}$ (resp. W_{K^*}) induit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ le groupe W' (resp. une extension de W' par certains automorphismes du diagramme de Dynkin relatif). Il reste donc à voir que les réflexions par rapport aux racines relatives réelles sont induites par des éléments de W_K.

Soit $\alpha' \in \Delta' = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ une racine relative réelle non multipliable et $\mathfrak{g}_{\alpha'} = \{x \in \mathfrak{g} \ / \ [h, x] = \alpha'(h)x, \forall h \in \mathfrak{a}\ \}$ l'espace propre correspondant. On note $\mathfrak{g}(\alpha')$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}_{\alpha'} \oplus {}^d\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha'}$ et $G(\alpha')$ le groupe semi-simple simplement connexe correspondant, cf.

[Bp2; §9] et [B3R; 4.6]. L'espace propre $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ est stable par σ' et $\mathfrak{g}(\alpha')$ est stable par Γ. Ainsi $\mathfrak{g}(\alpha')^{\sigma'}$ est une algèbre de Lie semi-simple réelle de rang relatif 1, de $SATDM$ $\mathbb{R}h_{\alpha'}$ (si $h_{\alpha'}$ est la coracine relative de α'), de $SACMD$ ${}^d\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}(\alpha')$ et de SIC ω'. Il est connu [H; VII 2.4] qu'il existe $k \in G(\alpha')^\Gamma$ tel que $\mathrm{Ad}(k).h_{\alpha'} = -h_{\alpha'}$. Mais, par construction de $G(\alpha')$ et de G, l'inclusion de $\mathfrak{g}(\alpha')$ dans $\mathfrak{g}$ s'intègre en un morphisme canonique $\pi : G(\alpha') \to G$, qui est donc $\Gamma-$équivariant. Ainsi $\pi(k)$ est dans $G^\Gamma = K$ et il induit la réflexion $r_{\alpha'} \in W'$ sur $\mathfrak{a}$ (puisque $G(\alpha')$ centralise $Ker(\alpha')$ dans $\mathfrak{a}$). D'après 2.9i, en modifiant $\pi(k)$ par un élément de $Z_K({}^d\mathfrak{h}^-) = Z_K(\mathfrak{a})$, on peut supposer $\pi(k)$ dans N_K. D'où la proposition.

□

Proposition 2.19. *Si $\alpha \in \Delta_{dr}$, sa restriction α' à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est une racine relative réelle et la restriction est une application $\mathbb{C}-$linéaire injective de $\sum_{\alpha\in\Delta_{dr}} \mathbb{C}\alpha$ dans le dual $\mathfrak{a}^*$.*

Remarque. Δ_{dr} est un sous-système de racines réelles clos de Δ_{re}, éventuellement vide et non forcément clos dans Δ. Son image Δ'_{dr} dans l'ensemble Δ'_{re} des racines relatives réelles est réunion d'orbites de W', d'après 2.18. On constate sur les tables de [B3R] que, dans le cas affine, Δ'_{dr} est clos dans Δ'_{re}.

Démonstration.

On a $\sum_{\alpha\in\Delta_{dr}} \mathbb{C}\alpha \subset \{\chi \in \mathfrak{h}^* \;/\; \chi(\mathfrak{h}^+) = 0\}$; il est donc clair que l'application restriction à $\mathfrak{a} = \mathfrak{h}^- + \mathfrak{c}$ est linéaire injective.

Si $\alpha \in \Delta_{dr}$, $\sigma'(\alpha) = \alpha$; donc $\mathfrak{g}(\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C}\alpha\check{} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ est une sous-algèbre $\Gamma-$stable isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Comme $\sigma'(\alpha\check{}) = \alpha\check{} = -\omega'(\alpha\check{})$, il existe e_α dans $\mathfrak{g}_\alpha^{\sigma'}$ tel que $f_\alpha = -\omega'(e_\alpha) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}^{\sigma'}$ vérifie $[e_\alpha, f_\alpha] = \alpha\check{}$. Alors l'élément $m_\alpha = \exp(e_\alpha)\exp(-f_\alpha)\exp(e_\alpha) = \exp(-f_\alpha)\exp(e_\alpha)\exp(-f_\alpha)$ est dans N_K, induit r_α sur ${}^d\mathfrak{h}$ et stabilise $\mathfrak{a}$. Sa restriction $w_{\alpha'}$ à $\mathfrak{a}$ est dans W' et $w_{\alpha'}(\alpha') = -\alpha'$. Il en résulte que α' est réelle d'après [Ro4; 3.11.2] ou car on sait que l'orbite sous le groupe de Weyl d'une racine imaginaire positive est entièrement formée de racines positives, cf. [Bp1; 2.4.1, 2.3.1 et 1.1.15] (ou [K; 5.4] pour les systèmes de racines non relatives).

□

Théorème 2.20. *Les classes de conjugaison de systèmes de racines fortement orthogonales de Δ_{dr} modulo $\mathcal{R}$ sous W_K, $W_{\tilde{K}}$ ou $W_{G_\mathbb{R}}$ sont les mêmes. En particulier les classes de conjugaison de SAC (resp. SAC $\sigma-$stable) de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous $\tilde{G}_\mathbb{R}$ ou $G_\mathbb{R}$ (resp. $\tilde{K}$ ou K) sont les mêmes.*

Démonstration.

D'après 2.19 les systèmes ϕ sont déterminés par leur restriction à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. On déduit donc la première assertion de 2.18, puis la seconde de 2.17 et 2.7.

□

Proposition 2.21. *Tout système de racines réelles déployées fortement orthogonales est conjugué par W_K à un sous-système de Δ de la forme $\Delta^m(J) = \Delta \cap (\oplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i)$ pour $J \subset I$ de type fini (i.e. $\Delta^m(J)$ fini). Ainsi il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison sous W_K de tels systèmes de racines.*

Démonstration.

Soit ϕ un système de racines fortement orthogonales de Δ_{dr}. Le produit w des r_α pour $\alpha \in \phi$ est d'ordre 2 dans W et vérifie $w(\alpha) = -\alpha$, $\forall \alpha \in \phi$. D'après 2.19 et sa démonstration, w stabilise $\mathfrak{a}_\mathbb{R} = ({}^d\mathfrak{h}^- + \mathfrak{c})^{\sigma'}$, sa restriction w' à $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est dans W' et w' est la symétrie par rapport au sous-espace (admissible) $\mathfrak{a}_\phi = \big(\cap_{\alpha \in \phi} \operatorname{Ker}(\alpha)\big) \cap \mathfrak{a}_\mathbb{R}$, qui est de codimension $\mid \phi \mid$ d'après 2.19. Mais, dans $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ le cône de Tits ouvert positif (associé à Δ') est un ouvert convexe, non vide, $W'-$stable et il est réunion de facettes (facette de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ = facette relative = $\mathbb{R}-$facette) de type fini [Bp1; 4.4]. Ainsi $\mathfrak{a}_\phi$ rencontre (donc contient) une facette de type fini. Par ailleurs toute facette de type fini dans $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ est conjuguée par le groupe de Weyl W' à une des facettes de type fini de la chambre fondamentale fermée de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. Or cette chambre est l'intersection avec $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ de la chambre fondamentale fermée $\mathcal{C}$ de ${}^d\mathfrak{h}$ et chacune de ses facettes de type fini est l'intersection avec $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ d'une facette de type fini $\mathcal{C}_J$ de $\mathcal{C}$ associée à une partie de type fini J de I, cf. [Ro3; §4] ou [Ro4; §3]. Ainsi, à conjugaison près par W' ou W_K (cf. 2.18), le système ϕ est contenu dans l'ensemble $\Delta^m(J) = \Delta \cap (\oplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i)$ des racines nulles sur $\mathcal{C}_J$, qui est fini, cf. [Ro4; 1.2] ou [B$_3$R; 1.2].

Comme il n'y a qu'un nombre fini de parties de type fini J de I et qu'un nombre fini de racines dans $\Delta^m(J)$, il est clair que le nombre de classes de conjugaison de systèmes ϕ est fini.

□

Théorème 2.22. *Il n'existe qu'un nombre fini de classes de conjugaison de SAC $\Gamma-$stables (resp. $\sigma'-$stables) de $\mathfrak{g}$ sous K^*, $\tilde{K}$ ou K (resp. $G_\mathbb{R}$).*

Démonstration.

Cela résulte aussitôt de 2.17 et 2.21.

□

§3. Étude de quelques exemples.

On va utiliser librement dans ce dernier paragraphe des réalisations comme algèbres de lacets des algèbres de Kac-Moody affines ainsi qu'un certain nombre de notations de [B$_3$R].

3.1. Les trois formes réelles presque déployées de $A_1^{(1)}$. On considère l'algèbre de Kac-Moody affine non tordue de type $A_1^{(1)}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

l'élément c est central et $d = t\frac{d}{dt}$. D'après la table de [B₃R; §6], il existe trois classes de conjugaison de formes réelles presque déployées de $\mathfrak{g}$ correspondant aux trois semi-involutions de première espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1, 2, 3$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard :

$$\omega'\left(\begin{pmatrix} P(t) & Q(t) \\ R(t) & -P(t) \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\bar{P}(t^{-1}) & -\bar{R}(t^{-1}) \\ -\bar{Q}(t^{-1}) & \bar{P}(t^{-1}) \end{pmatrix} \quad \text{et } (-\omega') \text{ fixe } c \text{ et } d$$

et les σ_i les involutions de Cartan qui seront explicitées ci-dessous. La sous-algèbre de Cartan standard est $\mathfrak{h} = \mathbb{C}\check{\alpha} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ où $\check{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbb{C}c$ est le centre $\mathfrak{c}$. On note δ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ nulle sur $\check{\alpha}$ et c, telle que $\delta(d) = 1$; c'est la plus petite racine imaginaire positive. La racine positive α de $\mathfrak{sl}_2$ (telle que $\alpha(\check{\alpha}) = 2$) est prolongée par 0 sur c et d. L'ensemble des racines réelles de $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est $\Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $(\alpha_0 = \delta - \alpha, \alpha_1 = \alpha)$ est une base de racines de Δ. Les coracines correspondantes sont $\check{\alpha_0} = c - \check{\alpha}$ et $\check{\alpha_1} = \check{\alpha}$. Les copoids fondamentaux sont $p_0 = d$ et $p_1 = d + \frac{\check{\alpha}}{2}$ (modulo le centre). Le diagramme de Dynkin associé à $\mathfrak{g}$ est donc:

$$0 \bullet\!\Longleftrightarrow\!\bullet\ 1$$

Pour chacune des trois formes presque déployées, la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ est $\Gamma-$stable et $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ est maximalement déployée. On va déterminer, les classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire celles des systèmes de racines réelles déployées fortement orthogonales de Δ, modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$, cf. Théorème 2.17. On rappelle que le système vide correspond à la classe de la sous-algèbre de Cartan maximalement déployée standard $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

1) La forme réelle déployée $A_{1,2}^{(1)}$ associée à $\sigma_1' = \omega\omega' = \sigma_n'$: L'involution de Cartan $\sigma_1 = \omega$ agit sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ par $M(t) \mapsto -{}^tM(t^{-1})$ et $(-\omega)$ fixe c et d. Dans ce cas, on a $\Delta_{dr} = \Delta^{re} = \{\pm\alpha + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\}$ et le rang maximal d'un système de racines réelles déployées fortement orthogonales est égal à 1. De plus le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admet des représentants dans K (2.18). Ainsi il existe dans $\Delta_{dr} = \Delta^{re}$ deux classes de conjugaison, sous W_K, de systèmes (de rang 1) de racines fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$ (à savoir la classe de α_0 et celle de α_1 qui sont échangées par l'automorphisme de diagramme involutif de $A_1^{(1)}$). Il y a donc une seule classe de conjugaison de tel système sous W_{K^*} et deux classes sous W_K ou $W_{\tilde{K}}$.

Remarque : La classe de conjugaison (sous K ou K^*) de la sous-algèbre de Cartan $\Gamma-$stable associée à la classe d'une racine non compacte $\alpha + n\delta$ (sous W_K ou W_{K^*}) est celle de

$$\mathfrak{h}_n := \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 & t^n \\ -t^{-n} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}(d - \frac{n}{2}\check{\alpha})$$

qui est donc maximalement compacte pour σ'_1. D'après ce que l'on vient de voir, il y a une seule classe de conjugaison de $SACMC$ $\Gamma-$stables sous K^* et deux classes sous $\tilde{K}$ ou K. D'après 2.7 et 2.20 il y a une seule classe de conjugaison de $SACMC$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$ ou $G^*_\mathbb{R}$ et deux classes sous $\tilde{G}_\mathbb{R}$ ou $G_\mathbb{R}$. Les autres SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sont maximalement déployées, elles sont donc conjuguées par $G_\mathbb{R}$ (cf. 2.1c).

2) La forme réelle presque déployée $A^{(1)3}_{1,1}$ associée à $\sigma'_2 = r_1\omega\omega' = r_1\sigma'_n$: L'involution de Cartan est $\sigma_2 = r_1\omega$, avec r_1 la réflexion par rapport à la racine α_1 (prolongée en une involution de $\mathfrak{g}$) qui agit par : $M(t) \mapsto -{}^tM(t)$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$ et fixe c et d. Dans ce cas Δ_{dr} est vide (car $r_1$ne fixe aucune racine réelle) et il y a une seule classe de conjugaison de SAC $\Gamma-$stable de $\mathfrak{g}$ sous K^* ou K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc toutes conjuguées par $G_\mathbb{R}$ (cf. 2.1c).

3) La forme réelle quasi-déployée ${}^2A^{(1)}_{1,1}$ associée à $\sigma'_3 = \rho\omega\omega' = \rho\sigma'_n$:
L'involution de Cartan est $\sigma_3 = \rho\omega$, avec ρ l'automorphisme de diagramme échangeant les deux sommets 0 et 1 du diagramme de Dynkin. L'action de ρ sur $\mathfrak{g}$ est donnée par : $M \mapsto -T({}^tM)T^{-1}$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, avec $T = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$, ρ fixe c et échange $p_0 = d$ et $p_1 = d+\frac{\alpha\check{}}{2}$ modulo le centre de $\mathfrak{g}$. Cette action est donc canonique sur $\mathfrak{g}'$ ou $\mathfrak{g}/\mathbb{C}c$, mais elle ne l'est pas sur $\mathfrak{g}$ (cf. 1.4). L'involution ρ ne fixe aucune racine réelle et donc Δ_{dr} est vide. Les sous-algèbres de Cartan $\Gamma-$stables de $\mathfrak{g}$ sont donc conjuguées par K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc toutes conjuguées par $G_\mathbb{R}$ (cf. 2.1c).
4) **Remarque :** En fait, pour cette forme réelle quasi-déployée ${}^2A^{(1)}_{1,1}$, les groupes $G_\mathbb{R}$ et $\tilde{G}_\mathbb{R}$ sont petits, réduits à $H_\mathbb{R}$ et $\tilde{H}_\mathbb{R}$; il n'y a donc qu'une seule SAC dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$:
D'après [PK] le groupe G est extension centrale par $\mathbb{C}^*$ du groupe $SL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])$; donc $G/Z(G) = SL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}])/\{\pm 1\}$ et $H/Z(G)$ est représenté par des matrices diagonales. Le copoids $\alpha\check{}$ (resp. $\frac{\alpha\check{}}{2}$) détermine un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $G/Z(G)$ qui à $z \in \mathbb{C}^*$ associe la classe $\alpha\check{}\otimes z$ de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$ (resp. la classe $\frac{\alpha\check{}}{2}\otimes z$ de $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \sqrt{z} & 0 \\ 0 & (\sqrt{z})^{-1} \end{pmatrix}$).
D'après 1.13.2, on a $\tilde{G} = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}^* \ltimes (G/Z(G) = (\mathbb{Z}d \otimes \mathbb{C}^*) \ltimes (G_1/Z(G_1))$ où $G_1 = \{\, g \in GL_2(\mathbb{C}[t,t^{-1}]) \ / \ det(g) \in \mathbb{C}^* \,\}$ et $Z(G_1) = \mathbb{C}^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans G_1, on a $\sigma'_3(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = T\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{C} \\ \bar{B} & \bar{D} \end{pmatrix}^{-1} T^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{D} & t^{-1}\bar{C} \\ t\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ dans $G_1/Z(G_1)$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\sigma'_3(d \otimes z) = (d + \frac{\alpha\check{}}{2}) \otimes \bar{z} = (d \otimes \bar{z}).\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $\tilde{G}$. Donc si $(d \otimes z).\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est

dans $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$, il existe $z, z' \in \mathbb{C}^*$ tels que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{D} & t^{-1}\bar{C} \\ t\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$ dans G_1; ainsi $D = z'\bar{A}$ et $C = z't\bar{B}$. On a donc $AD - BC = z'(A\bar{A} - tB\bar{B}) \in \mathbb{C}^*$. Mais $A\bar{A}$ et $B\bar{B}$ sont des polynômes de Laurent dont les plus bas et plus hauts degrés sont pairs; donc $A \in \mathbb{C}^*$, $B = 0$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in H$. On obtient bien $\tilde{G}_{\mathbb{R}} = \tilde{H}_{\mathbb{R}}$ et de même $G_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}$.
Cette situation de $G_{\mathbb{R}}$ petit pour une forme quasi-déployée est contraire à l'intuition du cas classique, mais déjà connue [Re; 13.4]. Ici $G_{\mathbb{R}}$ est particulièrement petit car toutes les racines se restreignent à $\mathfrak{a}$ en des racines relatives imaginaires.

3.2. Les deux formes réelles presque déployées de $A_2^{(2)}$.
On considère l'algèbre de Kac-Moody affine tordue $\mathfrak{g}$ de type $A_2^{(2)}$:

$$0 \bullet\!\!\Rrightarrow\!\!\bullet\ 1$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réalisée comme étant la sous-algèbre des points fixes de l'algèbre de Kac-Moody non tordue de type $A_2^{(1)}$:

$$\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d,$$

sous l'action de l'automorphisme involutif $\tilde{\rho}$ fixant c et d et agissant sur $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ par

$$M(t) \mapsto -T[\,{}^tM(-t)]T^{-1}, \quad \text{avec } T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in SL_3(\mathbb{C}).$$

D'après la table de [B$_3$R; §6], il existe deux classes de conjugaison de formes réelles presque déployées de $\mathfrak{g}$ correspondant aux deux semi-involutions de première espèce $\sigma_i' = \sigma_i\omega'$, $i = 1, 2$, où ω' est la semi-involution de Cartan standard et les σ_i les involutions de Cartan.

1) La forme réelle déployée $A_{2,2}^{(2)}$ associée à $\sigma_1' = \omega\omega' = \sigma_n'$: L'involution de Cartan est $\sigma_1 = \omega$ et $\Delta_{dr} = \Delta^{re} = \{\pm\alpha_1 + n\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pm 2\alpha_1 + (2n+1)\delta;\ n \in \mathbb{Z}\} = \{$ racines réelles courtes$\} \cup \{$ racines réelles longues$\}$ où $\delta = 2\alpha_0 + \alpha_1$ est la plus petite racine imaginaire positive. Le rang maximal d'un système de racines réelles déployées fortement orthogonales est égal à 1. De plus le groupe de Weyl W de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ admet des représentants dans K et il existe donc dans $\Delta_{dr} = \Delta^{re}$ deux classes de conjugaison, sous W_K, de systèmes (de rang 1) de racines fortement orthogonales modulo $\mathcal{R}$, à savoir la classe de α_0 (les racines réelles longues) et celle de α_1 (les racines réelles courtes). Il y a donc deux classes de conjugaison de $SACMC$ σ_1-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous K^* ou K et aussi deux classes de conjugaison de $SACMC$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^{\sigma'}$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')^{\sigma'}$, $G_{\mathbb{R}}^*$, $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$ ou $G_{\mathbb{R}}$. Les autres SAC sont maximalement déployées, elles sont conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$.

2) La forme réelle presque déployée $A_{2,1}^{(2)3}$ associée à $\sigma'_2 = r_1\omega\omega' = r_1\sigma'_n$: L'involution de Cartan est $\sigma_2 = r_1\omega$ avec r_1 la reflexion par rapport à la racine α_1 (prolongée en une involution de $\mathfrak{g}$). Dans ce cas Δ_{dr} est vide (car $r_1$ne fixe aucune racine réelle) et il y a une seule classe de conjugaison de SAC σ_2-stables de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sous K^* ou K. D'après 2.7, toutes les SAC de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ sont à la fois maximalement déployées et maximalement compactes, elles sont donc conjuguées par $G_{\mathbb{R}}$ (cf. 2.1c).

Index

Notations :

1.1 : A, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, e_i, f_i, $\mathfrak{g}_\alpha$, Δ, Π, α_i, $\check{\alpha_i}$, W, r_i, Δ^{re}, Δ^{im}, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}'$

1.2 : G, Ad, V_α, exp, V_+, V_-, H, B^+, B^-, N

1.3 : $\mathfrak{b}^+$, $\mathfrak{b}^-$

1.4 : $\tilde{H}$, ω, $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Ad}G = \mathrm{Int}'(\mathfrak{g}) = \mathrm{Int}(\mathfrak{g}')$, $\mathrm{Aut}(A)$, $\mathfrak{h}'$, $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g}')$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}')$, Tr, $\mathrm{Aut}_1(\mathfrak{g})$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$

1.5 : $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g})$, σ', $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, σ'_n

1.6 : $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}')$

1.8 : ω', B, $B_{\sigma'}$, $\mathfrak{g}''$, U

1.11 : σ, Γ, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{u}$, $\tilde{G}$, G^*, $G_{\mathbb{R}}$, $\tilde{G}_{\mathbb{R}}$, $G^*_{\mathbb{R}}$, K, $\tilde{K}$, K^*

1.12 : $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}^+_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}^-_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}^+$, $\mathfrak{h}^-$, $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, Δ_u, Δ_d, $\Delta_d^{re} = \Delta_{dr}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, R

1.13 : P, $\check{Q}$, Q, Q' $Z(G)$, δ, $H_{\mathbb{R}}$, $H^+_{\mathbb{R}}$, $H^-_{\mathbb{R}}$, $\tilde{H}_{\mathbb{R}}$, $\tilde{H}^+_{\mathbb{R}}$, $\tilde{H}^-_{\mathbb{R}}$

2.10 : ${}^d\mathfrak{h}$, ${}^d\mathfrak{h}^+$, ${}^d\mathfrak{h}^-$, N_X, W_X

2.15 : $\mathcal{R}$

2.18 : $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$, W'

Définitions :

adaptée (SIC) 1.11

adjoint (groupe) 1.4

admissible (sous-espace) 2.10

algébrique (sous-algèbre, sous-groupe) 1.12

compacte (forme ou semi-involution, partie de SAC ou de tore) 1.8, 1.12, 1.13

décomposition de Birkhoff 1.2

décomposition de Bruhat 1.2

décomposition de Cartan 1.11

décomposition d'Iwasawa 1.13

déployée ou normale (forme)	1.5
déployée (racine, partie de SAC ou de tore)	1.12, 1.13
diagramme (automorphisme de)	1.4
fortement orthogonales (racines)	2.14
espèce (automorphisme de première ou seconde)	1.3
intérieur(e) (automorphisme, forme)	1.4, 2.13
invariante (forme bilinéaire)	1.7, 1.8
involution de Cartan (de $\mathfrak{g}$, de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$)	1.4, 2.3
normale (forme, semi-involution)	1.5
parabolique (sous-algèbre)	1.3
poids (réseau des)	1.13
presque compacte, presque déployée (forme)	1.9
racine (réelle, imaginaire)	1.1
SAB sous-algèbre de Borel	1.3
SAC sous-algèbre de Cartan	1.3, 1.12
$SACMC$ (SAC maximalement compacte)	1.12
$SACMD$ (SAC maximalement déployée)	1.12, 2.1
$SATD$, $SATDM$ sous-algèbre torique déployée (maximale)	1.12
semi-linéaire, semi-involution	1.5
$SI1$, $SI2$ semi-involution de première ou seconde espèce	1.9
SIC semi-involution de Cartan (ou compacte)	1.8
spéciale (SAC)	2.10
standard (SAC, "Borel" , SIC)	1.1, 1.2, 1.3, 1.8
standard relativement à ${}^d\mathfrak{h}$ (SAC)	2.10
torique (partie de SAC ou de tore)	1.12, 1.13
transvection	1.4
unitaire (racine)	1.12
vectorielle (partie de SAC ou de tore)	1.12, 1.13

Références

[B$_3$R] V. Back-Valente, N. Bardy-Panse, H. Ben Messaoud et G. Rousseau; Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody, Classification et racines relatives. J. of Algebra 171 (1995), 43-96.

[Bp1] N. BARDY-PANSE; Systèmes de racine infinis. Mémoire de la S.M.F 65 (1996).

[Bp2] N. BARDY-PANSE; Sous algèbres birégulières d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds, Nagoya Math. J. 156 (1999), 1-83.

[BMR1] H. BEN MESSAOUD et G. ROUSSEAU; Classification des formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines, J. of Algebra 267 (2003) 443-513. Coquilles corrigées dans J. of Algebra 279 (2004) 850-851.

[BMR2] H. BEN MESSAOUD et G. ROUSSEAU; Sous-algèbres de Cartan des algèbres de Kac-Moody affines réelles presque compactes, preprint Nancy (2004).

[BM] A. BOREL et G.D. MOSTOW; On semi-simple automorphisms of Lie algebras. Ann. Math. 61 (1955), 389-405.

[H] S. HELGASON; Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. Academic Press, New York, 1978.

[K] V.G. KAC; Infinite dimensional Lie algebras. Troisième édition, Cambridge University Press (1990).

[KP1] V.G. KAC et D.H. PETERSON; Defining relations of certain infinite dimensional groups. "Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui" Lyon 1984, Astérisque n^o hors série (1985), 165-208.

[KP2] V.G. KAC et D.H. PETERSON; On geometric invariant Theory of infinite dimensional groups. In "Algebraic groups" Utrecht 1986, Springer lecture note in Math. 1271 (1987), 109-142.

[KW] V.G. KAC et S.P. WANG; On automorphisms of Kac-Moody algebras and groups. Advances in Math. 92 (1992), 129-195.

[PK] D.H. PETERSON et V.G. KAC; Infinite flag varieties and conjugacy theorems. Proc. Natl. Acad. Sc. USA 80 (1983), 1778-1782.

[Re] B. RÉMY; Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés. Astérisque 277 (2002).

[Ro1] G. ROUSSEAU; Formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines. In "Harmonic Analysis" Luxembourg 1987, Springer lecture note in Math. 1359 (1988), 252-264.

[Ro2] G. ROUSSEAU; Formes réelles presque compactes des algèbres de Kac-Moody affines. Revue de l'Institut Élie Cartan 11, Nancy (1988), 175-205.

[Ro3] G. ROUSSEAU; Almost split K-forms of Kac-Moody Algebras. In "Infinite dimensional Lie algebras and groups" Marseille (1988), V.G. Kac éditeur, Adv. Ser. in Math. Physics 7, World Scientific (1989), 70-85.

[Ro4] G. ROUSSEAU; L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody. Bull. Soc. Math. Belg. 42 (1990), 673-694.

[Ro5] G. ROUSSEAU; On forms of Kac-Moody algebras.

Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 56 part 2 (1994), 393-399.

[Su] M. Sugiura; Conjugate classes of Cartan Subalgebras in real semi-simple algebras. J. of the Math. Soc. of Japan 11 (1959), 374-434.
Corrections dans J. of the Math. Soc. of Japan 23 (1971), 379-383.

[W] G. Warner; Harmonic analysis on semi-simple groups, I, Grundlehren. Math. Wiss. 188, Springer Verlag Berlin (1972).

Adresses:

Hechmi Ben Messaoud
Département de Mathématiques.
Faculté des Sciences de Monastir.
5019. Monastir.
Tunisie.

E-mail :
Hechmi.BenMessaoud@fsm.rnu.tn

Guy Rousseau
Institut Élie Cartan.
Unité Mixte de Recherche 7502.
Université Henri Poincaré Nancy 1.
B.P 239.
54506 Vandœuvre lès Nancy.
France.

rousseau@iecn.u-nancy.fr